Die Weierstaß'sche $\wp$-Funktion

Kapitel 1: Konstruktion

Motivation: Ziel dieses Kapitels ist es ein möglichst einfaches Beispiel für eine elliptische Funktion zu finden.Wir wissen bereits, dass keine elliptische Funktion der Ordnung 1 existiert. Wir suchen also eine elliptische Funktion zweiter Ordnung. Eine solche Funktion hat entweder (modulo L) genau zwei Pole erster Ordnung oder einen Pol zweiter Ordnung. Wir werden den zweiten Ansatz verfolgen.

Frage: Warum sollte nicht eine elliptische Funktion zweiter Ordnung existieren, welche in 0 einen Pol zweiter Ordnung hat? Jeder andere Pol muss dann ein Gitterpunkt sein und umgekehrt muss jeder Gitterpunkt ein Pol sein.

Der erste Ansatz der einem hierfür in den Sinn kommt ist eine Reihe der Form:

$$\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-\omega)^2}$$

Allerdings konvergiert diese Reihe nicht absolut, denn wählt man z = 0, L=$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ gilt für $\omega = n+mi$:

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}\right| = \frac{1}{|n+mi|^2} = \frac{1}{n^2+m^2}$$

Und es gilt:

Lemma 1:*Die Reihe*

$$\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\(n,m)\neq(0,0)}}\frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha},\alpha\in\mathbb{R}$$

konvergiert dann und nur dann, wenn $\alpha>1$ ist.

Beweis: Es gilt, dass $\frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha}$ monoton fallend in n bzw. m ist. Hieraus folgt dann:

$$\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\n^2+m^2\geq 2}}\frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha}\leq\int_{x^2+y^2\geq 1}\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy\leq\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\n^2+m^2\geq 1}}\frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha}$$

Man sieht also die angegebene Reihe konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$I=\int_{x^2+y^2\geq 1}\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

konvergiert. Dieses lässt sich einfach mit Polarkoordinaten berechnen:

$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$$

Die Gramsche Determinante ist r, also erhalten wir

$$I=\int_0^{2\pi}\int_1^\infty\frac{r}{r^{2\alpha}}drd\varphi=2\pi\int_1^\infty\frac{1}{r^{2\alpha-1}}dr.$$

Diese Integral konvergiert genau für $2\alpha-1>1$

□

Aus Lemma 1. folgern wir nun

Lemma 2: *Sei $L \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Die Reihe*

$$\sum_{\omega \in L - \{0\}} |\omega|^{-s}, s > 2,$$

konvergiert.
Beweis: Sei

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2.$$

Wegen Lemma 1. genügt es zu zeigen, dass es eine nur von ω_1 und ω_2 abhängige Konstante $\delta > 0$ gibt, mit der Eigenschaft

$$|n\omega_1 + m\omega_2|^2 \geq \delta(n^2 + m^2)$$

Wir zeigen allgemein, dass die Funktion

$$f(x, y) = \frac{|x\omega_1 + y\omega_2|^2}{x^2 + y^2}, (x, y) \in \mathbb{R} - \{(0, 0)\},$$

ein *positives* Minimum besitzt. Da f homogen ist, braucht man die nur auf der Kreisline

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

zu zeigen.Diese ist kompakt, und daher hat jede stetige Funktion auf ihr ein Minimum. Da f nur positive Werte annimmt, muss auch dieses Minimum positiv sein.

□

Der ursprüngliche Ansatz wurde durch K. WEIERSTRASS modifiziert. Durch Einführung *konvergenzerzeugender Summanden* wird die Konvergenz erzwungen.

Lemma 3: *Sei $M \subset L - \{0\}$ eine Menge von Gitterpunkten. Die Reihe*

$$\sum_{\omega \in M} [\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}]$$

konvergiert in $\mathbb{C} - M$ normal und stellt dort eine analytische Funktion dar.
Beweis: Es gilt

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{\omega^2 - (z - \omega^2)}{\omega^2 (z - \omega)^2} \right| = \frac{|\omega^2 - (z^2 - 2\omega z + \omega^2)|}{|\omega|^2 |z - \omega|^2} = \frac{|z^2 - \omega z|}{|\omega|^2 |z - \omega|^2} = \frac{|z||z - 2\omega|}{|\omega|^2 |z - \omega|^2}$$

Sei nun $K = \overline{U}_r(0)$die abgeschlossene Kreisscheibe um 0 mit Radius r. Für ω mit $|\omega| \geq 2r$ gilt dann für $z \in K$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right| &= \frac{|z||z-2\omega|}{|\omega|^2|z-\omega|^2} \\
&\leq \frac{r(r-|2\omega|)}{|\omega|^2||z|-|\omega||^2} \\
&\leq \frac{r(r-|2\omega|)}{|\omega|^2||\omega|-\frac{1}{2}|\omega||^2} \\
&\leq \frac{r(|\omega|-|2\omega|)}{|\omega|^2||\omega|-\frac{1}{2}|\omega||^2} \\
&= \frac{3r|\omega|}{\frac{1}{4}|\omega|^4} = 12r|\omega|^{-3}
\end{aligned}
$$

Somit folgt die Konvergenz der Reihe direkt aus Lemma 2. und dem Majorantenkriterium für Reihen.

□

Definition(K. WEIERSTRASS, 1862,1863): Die durch

$$
\boxed{\begin{aligned}
\wp(z;L) = \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in L-\{0\}}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right] \quad &bei \quad z \notin L \\
\wp(z) = \infty \quad &bei \quad z \in L
\end{aligned}}
$$

definierte Funktion heißt **Weierstraß'sche $\wp$-Funktion** zum Gitter L.

Kapitel 2: Eigenschaften

Aus unseren bisherigen Überlegungen schließen wir:

Satz 1: *Die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion zum Gitter L ist (in ganz $\mathbb{C}$) meromorph. Sie hat Pole zweiter Ordnung in den Gitterpunkten und ist außerhalb von L analytisch. Die $\wp$-Funktion ist gerade, d.h.*

$$\wp(z) = \wp(-z)$$

Ihre Laurententwicklung um $z_0 = 0$ ist von der Form

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots \quad (also\ a_0 = 0)$$

Da neben der $\wp$-Funktion auch ihr Ableitung eine große Rolle spielt betrachten wir nun diese. Aus Kap. 1 Lemma 3 und Kap. 2 Satz 1 folgt:

Lemma 1: *Die Ableitung der $\wp$-Funktion*

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-\omega)^3}$$

hat Pole dritter Ordnung in den Gitterpunkten und ist außerhalb von L analytisch. Sie stellt eine ungerade Funktion dar, d.h.

$$\wp'(-z) = -\wp'(z)$$

Satz 2: *Die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion ist eine elliptische Funktion der Ordnung 2. Ihre Ableitung ist eine elliptische Funktion der Ordnung 3.*

Beweis. Die Ableitung der $\wp$-Funktion ist elliptisch, denn es gilt, für $\omega_0 \in L$

$$\wp'(z+\omega_0) = -2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z+\omega_0-\omega)^3} = \wp'(z),$$

da mit ω auch $\omega - \omega_0$ alle Gitterpunkte durchläuft. (Für die $\wp$-Funktion selbst kann man wegen der konvergenzerzeugenden Summanden so nicht schließen!) Es folgt, dass die Funktion

$$\wp(z+\omega_0) - \wp(z) \quad mit \quad \omega_0 \in L$$

konstan ist, da ihre Ableitung verschwindet.

Wir zeigen, dass diese Konstante verschwindet, und können dabei annehmen, dass ω_0 eines der beiden Basiselemente ist. Dann ist $\frac{1}{2}\omega_0$ nicht in L enthalten. Wir setzten speziell $z = -\frac{1}{2}\omega_0$ und erhalten für den Wert der Konstanten

$$\wp(-\frac{1}{2}\omega_0+\omega_0) - \wp(-\frac{1}{2}\omega_0) = \wp(\frac{1}{2}\omega_0) - \wp(-\frac{1}{2}\omega_0) = 0,$$

da $\wp$ eine gerade Funktion ist. Damit ist die Elliptizität von $\wp$ bewiesen.

□

Wir werden nun die Nullstellen der Ableitung bestimmen.

Lemma 2 (Invariante Kennzeichnung der Nullstellen von $\wp'$): *Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ ist genau dann eine Nullstelle von $\wp'$, falls*

$$a \notin L\ , \quad 2a \in L,$$

gilt. Es gibt genau drei Nullstellen auf dem Periodentorus $\mathbb{C}/L$. Alle drei Nullstellen sind einfach.

Beweis. Wenn a die angegebene Eigenschaft hat so gilt

$$\wp'(a) \underset{2a\in L}{=} \wp'(a-2a) = \wp'(-a) \underset{\wp\ ungerade}{=} -\wp'(a)$$

und daher $\wp'(a) = 0$.

Wir haben somit drei Nullstellen von $\wp'$ gefunden, denn die Punkte

$$\frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{\omega_2}{2} \ und \ \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

sind modulo L paarweise verschieden. Nach dem dritten LIOUVILLE'schen Satz kann es keine weitere Nullstelle geben. Aus demselben Grund kann keine dieser Nullstellen mehrfache Nullstelle sein.

□

Man bezeichnet die Werte der $\wp$-Funktion an den eben gefunden Nullstellen von $\wp'$ wie folgt

$$e_1 := \wp(\frac{\omega_1}{2}), \quad e_2 := \wp(\frac{\omega_2}{2}), \quad e_3 := \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}).$$

Bemerkung: Die sogenannten "Halbwerte"der $\wp$-Funktion

$$e_1 := \wp(\frac{\omega_1}{2}), \quad e_2 := \wp(\frac{\omega_2}{2}), \quad e_3 := \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$$

sind paarweise verschieden und hängen - abgesehen von der Reihenfolge - nur vom Gitter L, nicht jedoch von der Wahl der Basis ω_1, ω_2 ab.

Beweis. Wir nehmen einmal an es gelte $e_1 = e_2$. Dann wird der Wert $b = e_1 = e_2$ mindestens viermal angenommen, nämlich mindestens zweifach an den Stellen

$$\frac{\omega_1}{2} \quad und \quad \frac{\omega_2}{2} \quad \left(beachte\ \wp'\left(\frac{\omega_i}{2}\right) = 0\right)$$

Diese sind modulo L paarweise inäquivalent. Die $\wp$-Funktion hat jedoch die Ordnung 2 und kann daher nur zwei b-Stellen besitzen!

Die Eindeutigkeit von e_1, e_2, e_3 bis auf die Reihenfolge ergibt sich aus der invarianten Kennzeichnung Lemma 2.(Man beachte, dass die Gitterbasis nicht eindeutig bestimmt ist. Mit ω_1, ω_2 ist beispielsweise auch $\omega_1, \omega_2 + \omega_1$ eine Gitterbasis.)

□

Satz 3: *Seien z und w zwei beliebige Punkte aus $\mathbb{C}$. Es gilt*

$$\wp(z) = \wp(w)$$

genau dann, wenn

$$z \equiv \ w \ mod \ L \quad z \equiv \ -w \ mod \ L$$

Beweis. Die Funktion $z \mapsto \wp(z) - \wp(w)$ ist bei festem w eine elliptische Funktion in z der Ordnung 2 und hat also mod L genau zwei Nullstellen. Diese sind offenbar $z = w$ und $z = -w$. (Im Falle $w \equiv -w \ mod \ L$ hat man eine doppelte Nullstelle, sonst zwei einfache Nullstellen.)

□

Damit ist das *Abbildungsverhalten* der $\wp$-Funktion

$$\wp : \mathbb{C}/L \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

weitgehend geklärt. Es liegen vier Verzweigungspunkte in $\bar{\mathbb{C}}$ vor, nämlich e_1, e_2, e_3 und ∞. Diese haben jeweils genau einen Urbildpunkt in $\mathbb{C}/L$. Alle anderen Punkte haben genau zwei Urbildpunkte.

Wir bestimmen abschließend die Laurentreihe der Weierstrass'schen $\wp$-Funktion um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe muss gleich $\min\{|\omega|; \omega \in L, \omega \neq 0\}$ sein.

Man ermittelt die Koeffizienten am einfachsten aus der Taylorreihenentwicklung für die Funktion

$$f(z) := \wp(z) - \frac{1}{z^2}, \quad a_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}.$$

Wir wissen bereits, dass $a_0 = 0$ ist. Im Falle $n > 1$ gilt, wie man durch Induktion leicht zeigt,

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n (n+1)! \sum_{\omega \in L - \{0\}} \frac{1}{(z-\omega)^{n+2}}.$$

Es folgt dann

$$a_{2n} = \frac{(2n+1)!}{(2n)!} \sum_{\omega \in L - \{0\}} \frac{1}{\omega^{2(n+1)}}.$$

Zusammengefasst erhalten wir:

Satz 4: *Die Reihe*

$$G_n = \sum_{\omega \in L - \{0\}} \omega^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 2,$$

konvergiert absolut, und es gilt

$$\boxed{\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2(n+1)} z^{2n}}$$

in einer geeigneten punktierten Umgebung von $z = 0$ *(nämlich in der größten punktierten offenen Kreisscheibe um 0, die keinen von 0 verschiedenen Gitterpunkt enthält.)*